Université Abdelmalek Assaâdi
FST Tanger/ Année 10-11/MIPC/M112

Série de TD n°5

Exercice1

1. Calculer $\int \frac{x^4 - 3x^2 + 2}{x^4 + x^2} dx.$

2. En déduire $\int \frac{\cos^3(t) + \cos^5(t)}{\sin^2(t) + \sin^4(t)} dt.$

Exercice2

1. Calculer $\int \frac{7x - 5}{x^3 + x^2 - 6x} dx.$

2. Calculer $\int \frac{x^2 + 6x - 1}{(x-3)^2 (x-1)} dx.$

Exercice3

1. Décomposer en éléments simples sur $\boldsymbol{R}$ les fonctions rationnelles suivantes :

$$\frac{x^5 + 2}{x^3 - 1}, \quad \frac{1}{(x^2+1)^2 (x^2 - 1)}.$$

2. Donner les primitives de ces fonctions rationnelles.

Exercice4

Calculer

$$a) \int \frac{1}{\sqrt{(x-1)(2-x)}} dx, \quad b) \int \frac{1}{\sqrt{-2x^2 - 5x - 2}} dx,$$
$$c) \int \frac{1}{(x^2 + a^2)\sqrt{a^2 - x^2}} dx \quad ; a > 0.$$

Exercice5

Calculer les primitives suivantes et indiquer là où les résultats trouvés sont valables:

$$a) \int \frac{1}{\sqrt{e^x + 1}} dx, \qquad b) \int \frac{1}{\sqrt{e^x - 1}} dx,$$
$$c) \int \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx.$$

Exercice6

1. Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{a + b\cos^2(x)} dx;\ a, b > 0.$

ETUSUP .com

2. Calculer

$$a)\int_0^x \frac{1}{\sin^2(t)+3\cos^2(t)}dt,\quad b)\int_0^x \frac{1}{2+\cos(t)}dt,$$
$$c)\int_0^x \frac{t^2}{(t\sin(t)+\cos(t))^2}dt.$$

Exercice7

Etudier la convergence des intégrales généralisées suivantes:

$$a)\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha(1+t)^\beta}dt,\quad b)\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt,$$
$$c)\int_1^{+\infty} \frac{e^{\sin t}}{t}dt,\qquad d)\int_1^{+\infty} \frac{(-1)^{[x]}}{t}dt.$$

Exercice8

1. Etudier la convergence des intégrales suivantes:

$$a)\int_a^b \frac{dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)}},\quad b)\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n},$$
$$c)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\,dt.$$

2. Calculer ces intégrales.

Exercice9

On considère les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définies par:

$$u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^\alpha}{n^\alpha+1};\ \alpha\geq 0,\quad v_n=\frac{1}{n}\prod_{k=1}^{n}(n+k)^{\frac{1}{n}}.$$

Calculer leurs limites en utilisant convenablement les sommes de Riemann.

ETUSUP .com

ETUSUP .com

Série de TD n°5

Exercice 1

a) $\displaystyle\int \frac{x^4-3x^2+2}{x^4+x^2}\,dx$

La décomposition de la fraction rationnelle $\frac{x^4-3x^2+2}{x^4+x^2} = \frac{x^4+x^2-4x^2+2}{x^4+x^2} =$
$= 1 + \frac{2-4x^2}{x^2(x^2+1)}$ est de la forme $1 + \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x} + \frac{cx+d}{x^2+1}$. la fraction rationnelle est paire, en changeant x en $-x$ on obtient

$$\frac{x^4+x^2-4x^2+2}{x^4+x^2} = 1 + a/x^2 - \frac{b}{x} + \frac{-cx+d}{x^2+1}$$

dont on déduit que $b=c=0$. Multipliant à droite et à gauche par x^2 et prenant $x=0$ on obtient $a=2$. Multipliant à droite et à gauche par x^2+1 et prenant $x=i$ on obtient $d=-6$. Donc

$$\frac{x^4-3x^2+2}{x^4+x^2} = 1 + 2/x^2 - \frac{6}{x^2+1}$$

D'où $\displaystyle\int \frac{x^4-3x^2+2}{x^4+x^2}\,dx = x - 2/x - 6\,\mathrm{arctg}\,x + C$; C constante dans les deux intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

b) $\displaystyle\int \frac{\cos^3 t + \cos^5 t}{\sin^2 t + \sin^4 t}\,dt$,

Pour $t \in]0, \pi[$ on pose $x = \sin t$. Alors $dx = \cos t\,dt$ et

$$\int \frac{\cos^3 t + \cos^5 t}{\sin^2 t + \sin^4 t}\,dt = \int \frac{\cos^2 t + \cos^4 t}{\sin^2 t + \sin^4 t}\cos t\,dt = \int \frac{1-x^2+(1-x^2)^2}{x^2+x^4}\,dx =$$

$$= \int \frac{x^4-3x^2+2}{x^2+x^4}\,dx = x - 2/x - 6\,\mathrm{arctg}\,x + C = \sin t - \frac{2}{\sin t} - 6\,\mathrm{arctg}(\sin t) + C$$

Exercice 2

a) $\displaystyle\int \frac{7x-5}{x^3+x^2-6x}\,dx$:

On a $x^3+x^2-6x = x(x^2+x-6) = x(x-2)(x+3)$. Donc

$\dfrac{7x-5}{x^3+x^2-6x} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x-2} + \dfrac{c}{x+3}$. Pour toute valeur de x qui n'annule pas le dénominateur, on détermine a, b, c en multipliant successivement par x, $x-2$ et $x+3$ les deux membres de la dernière égalité et en donnant à x les valeurs $0, 2$ et -3, respectivement, dans les relations obtenues. On obtient $a=\frac{5}{6}$, $b=\frac{9}{10}$ et $c=-\frac{26}{15}$.

On a alors,

$$\int \frac{7x-5}{x^3+x^2-6x}\,dx = \frac{5}{6}\int\frac{dx}{x} + \frac{9}{10}\int\frac{dx}{x-2} - \frac{26}{15}\int\frac{dx}{x+3}$$

$$= \frac{5}{6}\ln|x| + \frac{9}{10}\ln|x-2| - \frac{26}{15}\ln|x+3| + C$$

$C \equiv$ constante appartenant à $\mathbb{R}$.

b) $\displaystyle\int \frac{x^2+6x-1}{(x-3)^2(x-1)}\,dx$;

$\dfrac{x^2+6x-1}{(x-3)^2(x-1)} = \dfrac{a}{(x-3)^2} + \dfrac{b}{x-3} + \dfrac{c}{x-1}$; $a=13$, $b=-\frac{1}{2}$ et $c=\frac{3}{2}$

On a alors $\displaystyle\int \frac{x^2+6x-1}{(x-3)^2(x-1)}\,dx = -\frac{13}{x-3} - \frac{1}{2}\ln|x-3| + \frac{3}{2}\ln|x-1| + C$;

$C \equiv$ constante appartenant à $\mathbb{R}$.

Exercice 3

$\dfrac{x^5+2}{x^3-1}$:

On a $x^5+2 = x^2(x^3-1)+x^2+2$ et donc $\dfrac{x^5+2}{x^3-1} = x^2 + \dfrac{x^2+2}{x^3-1}$

ETUSUP .com

$$= x^2 + \frac{x^2+2}{(x-1)(x^2+x+1)} = x^2 + \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+x+1}$$

Multipliant par $x-1$ et posant $x=1$, on obtient $a=1$. Posant $x=0$, on obtient $-2=-a+c$ soit $c=-1$. Multipliant par x et faisant tendre x vers $+\infty$, on obtient $a+b=1$ soit $b=0$. On a donc $\frac{x^5+2}{x^3-1} = x^2 + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x^2+x+1}$. D'où

$$\int \frac{x^5+2}{x^3-1}\,dx = \frac{x^3}{3} + \ln|x-1| - \int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{x^3}{3} + \ln|x-1| - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right) + C$$

$C \equiv$ constante $\in \mathbb{R}$.

b)

$$\frac{1}{(x^2+1)^2(x^2-1)} = \frac{1}{(x^2+1)^2(x+1)(x-1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1} + \frac{cx+d}{(x^2+1)^2} + \frac{ex+f}{x^2+1}$$

En utilisant la parité de la fraction rationnelle, on obtient $a=-b$ et $c=e=0$. Multipliant les deux membres par $x-1$ puis prenant $x=1$, on obtient $b=\frac{1}{8}$. Multipliant par $(x^2+1)^2$ et prenant $x=i$ on obtient $d=-\frac{1}{2}$. Prenant $x=0$, on obtient

$$-1 = a-b+d+f$$

et donc $f=-\frac{1}{4}$. On a donc,

$$\frac{1}{(x^2+1)^2(x^2-1)} = \frac{-1}{8(x+1)} + \frac{1}{8(x-1)} - \frac{1}{2(x^2+1)^2} - \frac{1}{4(x^2+1)}$$

Pour calculer $\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$ on intègre par parties $\int \frac{dx}{x^2+1}$. On a

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{x}{x^2+1} - \int x \frac{-2x}{(x^2+1)^2}\,dx$$

$$= \frac{x}{x^2+1} + 2\int \frac{(x^2+1)-1}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{x}{x^2+1} + 2\int \frac{dx}{x^2+1} - 2\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

ETUSUP .com

d'où

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + c$$

On a donc

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2-1)} = \frac{1}{8}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{x}{4(x^2+1)} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + c$$

$C \equiv$ constante $\in \mathbb{R}$.

<u>Exercice 4</u>

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}$

Cette intégrale est du type $\displaystyle\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$ où R est une fraction rationnelle. Si ax^2+bx+c admet deux racines réelles α et β on pose $\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-\alpha)$ (substitution d'Euler).

On pose :

$$\sqrt{(x-1)(2-x)} = t(x-1)$$

On a $t = \sqrt{\frac{2-x}{x-1}}$ et $x = \frac{t^2+2}{t^2+1}$. Donc $\sqrt{(x-1)(2-x)} = \frac{t}{t^2+1}$

et $dx = \frac{-2t}{(t^2+1)^2}\,dt$. Donc

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(2-x)}} = -2\int \frac{dt}{t^2+1} = -2\operatorname{arctg} t + c$$

$$= -2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2-x}{x-1}} + c$$

$C \equiv$ constante $\in \mathbb{R}$.

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{-2x^2-5x-2}}$

$-2x^2-5x-2 = -(x+2)(2x+1)$; $x \in \left]-2; -\frac{1}{2}\right[$. On pose :

ETUSUP .com

$\sqrt{-2x^2-5x-2} = t(x+2)$; $t = \sqrt{-\frac{2x+1}{x+2}}$, $x = \frac{-2t^2-1}{t^2+2}$

$dx = -\frac{6t}{(t^2+2)^2}$ et $\sqrt{-2x^2-5x-2} = \frac{3t}{t^2+2}$. Donc

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-2x^2-5x-2}} = \int \frac{\frac{-6t}{(t^2+2)^2}}{\frac{3t}{t^2+2}} dt = -2\int \frac{dt}{t^2+2}$$

$$= -\sqrt{2}\,\text{arctg}\,\frac{t}{\sqrt{2}} + c = -\sqrt{2}\,\text{arctg}\sqrt{-\frac{2x+1}{2(x+2)}} + c$$

$c = cte \in \mathbb{R}$.

c) $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)\sqrt{a^2-x^2}}$; $a>0$

La courbe d'équation $y=\sqrt{a^2-x^2}$ est le demi-cercle centré à l'origine et de rayon a situé dans le demi-plan supérieur. On pose $x = a\cos t$ ($0<t<\pi$ puisque $|x|<a$), alors $t = \arccos\frac{x}{a}$ et $\sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2-a^2\cos^2 t} = a\sqrt{\sin^2 t} = a\sin t$ car $\sin t > 0$ si $t \in]0,\pi[$.

Donc
$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)\sqrt{a^2-x^2}} = -\int \frac{a\sin t}{a^2(1+\cos^2 t)\,a\sin t} = \frac{-1}{a^2}\int \frac{dt}{1+\cos^2 t}$$

On pose $u = \text{tg}\,t$ ($t \neq \pi/2$ ou $x \neq 0$), alors.

$$\int \frac{dt}{1+\cos^2 t} = \int \frac{du}{u^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\text{arctg}\,\frac{u}{\sqrt{2}} + c \;;\; c = cte \in \mathbb{R}$$

Donc
$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{1}{a^2\sqrt{2}}\,\text{arctg}\,\frac{\text{tg}\,t}{\sqrt{2}} + c$$

$$= \frac{-1}{a^2\sqrt{2}}\,\text{arctg}\left(\frac{\text{tg}(\arccos x/a)}{\sqrt{2}}\right) + c .$$

<u>Exercice 5</u>

a) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$,

ETUSUP .com

Introduisons le changement de variable $\sqrt{e^x+1} = t$ $(t>1)$, on a :

$x = \ln(t^2-1)$ et $dx = \frac{2t}{t^2-1}dt$. Donc

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}} = 2\int \frac{t\,dt}{(t^2-1)t} = \ln\frac{t-1}{t+1} + c = \ln\left(\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}\right) + c$$

$c \equiv cte \in \mathbb{R}$.

b) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$; $x>0$

$t = \sqrt{e^x-1}$, $x = \ln(t^2+1)$ et $dx = \frac{2t\,dt}{t^2+1}$. Donc

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}} = 2\int \frac{dt}{t^2+1} = 2\,\mathrm{arctg}\,t + c = 2\,\mathrm{arctg}\sqrt{e^x-1} + c,\ x>0$$

$c \equiv cte \in \mathbb{R}$.

c) $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$;

Pour $x \in]0,1[$, $\sqrt{x(1-x)} = \sqrt{\frac{1}{4} - (x-\frac{1}{2})^2}$ et

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = 2\int \frac{dx}{\sqrt{1-4(x-\frac{1}{2})^2}} = \arcsin 2(x-\tfrac{1}{2}) + c$$

$c \equiv cte \in \mathbb{R}$.

<u>Exercice 6</u>

a) $\int_0^{\pi/4} \frac{dt}{a+b\cos^2 t}$; $a>0$, $b>0$

On pose $u = \mathrm{tg}\,t$. On a $du = (1+\mathrm{tg}^2 t)dt = (1+u^2)dt$ et

$$\int_0^{\pi/4} \frac{dt}{a+b\cos^2 t} = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{a(1+\mathrm{tg}^2 t)+b}\,\frac{dt}{\cos^2 t} = \int_0^1 \frac{du}{a(1+u^2)+b}$$

$$= \frac{1}{a}\int_0^1 \frac{du}{u^2+\frac{a+b}{a}} = \frac{1}{a}\left[\sqrt{\frac{a}{a+b}}\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{a}{a+b}}\,u\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a(a+b)}}\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{a}{a+b}}.$$

b) $\int_0^{\pi} \frac{dt}{\sin^2 t + 3\cos^2 t}$,

ETUSUP .com

On pose $u = \operatorname{tg} t$. On a $du = \frac{dt}{\cos^2 t}$ et

$$\int_0^x \frac{dt}{\sin^2 t + 3\cos^2 t} = \int_0^x \frac{dt}{(\operatorname{tg}^2 t + 3)\cos^2 t} = \int_0^{\operatorname{tg} x} \frac{du}{u^2+3} = \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{u}{\sqrt{3}}\right]_0^{\operatorname{tg} x} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{3}}$$

c) $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{2+\cos t}$;

On a $\cos t = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}}{1+\operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}}$. On pose $u = \operatorname{tg} \frac{t}{2}$, alors

$$\int_0^x \frac{dt}{2+\cos t} = \int_0^{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} \frac{\frac{2\,du}{1+u^2}}{2+\frac{1-u^2}{1+u^2}} = \int_0^{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} \frac{2\,du}{3+u^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}$$

d) $\displaystyle\int_0^x \frac{t^2}{(\cos t + t\sin t)^2}\,dt$:

Posons $u = \dfrac{t}{\cos t}$, $v' = \dfrac{t\cos t}{(\cos t + t\sin t)^2}$, on a, par parties,

$$\int_0^x \frac{t^2}{(\cos t + t\sin t)^2} = \int_0^x u(t)\,v'(t)\,dt = [u(t)v(t)]_0^x - \int_0^x u'(t)\,v(t)\,dt$$

$$= \left[\frac{t}{\cos t} \cdot \frac{-1}{\cos t + t\sin t}\right]_0^x - \int_0^x \left(\frac{t}{\cos t}\right)' \frac{-1}{\cos t + t\sin t}\,dt$$

$$= \frac{-x}{\cos^2 x + x\sin x\cos x} + \int_0^x \frac{dt}{\cos^2 t} = \frac{-x}{\cos^2 x + x\sin x\cos x} + \operatorname{tg} x .$$

<u>Exercice 7</u>

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha (1+t)^\beta}$:

$\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{t^\alpha}{t^\alpha(1+t)^\beta} = 1$, donc $\dfrac{1}{t^\alpha(1+t)^\beta} \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{t^\alpha}$

$\displaystyle\lim_{t\to +\infty} \frac{t^{\alpha+\beta}}{t^\alpha(1+t)^\beta} = 1$, donc $\dfrac{1}{t^\alpha(1+t)^\beta} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{\alpha+\beta}}$

ETUSUP .com

Donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha (1+t)^p}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha (1+t)^p}$ converge ssi $\alpha + p > 1$

Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha (1+t)^p}$ converge ssi $\begin{cases} \alpha < 1 \\ \text{et} \\ \alpha + p > 1 \end{cases}$

b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$

$\displaystyle\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$, donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin t}{t}\, dt$ existe et est finie

Soit $x > 1$, on a $\displaystyle\int_1^x \frac{\sin t}{t}\, dt = \left[-\frac{\cos t}{t}\right]_1^x - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2}\, dt$

$$= -\frac{\cos x}{x} + \cos 1 - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2}\, dt$$

or $\displaystyle\left|\int_1^x \frac{\cos t}{t^2}\, dt\right| \leq \int_1^x \frac{dt}{t^2} < +\infty \quad \left(= -\frac{1}{x} + 1\right)$. Donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\, dt$ converge. Puisque $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$ converge.

c) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(-1)^{[x]}}{x}\, dx$:

Soit $T > 1$, on pose $n = [T]$. On a

$$\int_1^T \frac{(-1)^{[x]}}{x}\, dx = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{(-1)^{[x]}}{x}\, dx + \int_n^T \frac{(-1)^{[x]}}{x}\, dx$$

Sur $[k, k+1[$, $[x] = k$. On a donc :

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{(-1)^{[x]}}{x}\, dx = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \ln \frac{k+1}{k}$. Donc :

ETUSUP .com

$$\int_2^T \frac{(-1)^{[x]}}{x}\,dx = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \ln\frac{k+1}{k} + (-1)^n \ln\frac{T}{n}$$

$$\left|(-1)^n \ln\frac{T}{n}\right| \leq \ln\frac{n+1}{n}$$

d'où $\lim\limits_{T\to+\infty} \ln T/n = 0$

Donc $$\int_1^{+\infty} \frac{(-1)^{[x]}}{x}\,dx = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \ln\frac{k+1}{k}$$

On admet que la suite $\left(\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \ln\frac{k+1}{k}\right)_n$ converge.

d) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{\sin t}}{t}\,dt$: $\sin t \geq -1$ $\forall t$ et donc $e^{\sin t} \geq e^{-1}$ et

$$\frac{e^{\sin t}}{t} \geq \frac{1}{2t} \quad \forall t \geq 1$$

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t} = +\infty$ et donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{\sin t}}{t}\,dt = +\infty$.

<u>Exercice 8</u>

a) $\displaystyle\int_a^b \frac{dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)}}$:

Substitution d'Euler, $\sqrt{(t-a)(b-t)} = u(t-a)$. On a alors

$u = \sqrt{\frac{b-t}{t-a}}$, $t = \frac{au^2+b}{1+u^2}$, $du = \frac{1}{2}\frac{a-b}{(t-a)^2}\sqrt{\frac{t-a}{b-t}}\,dt$. Donc

$$\int_a^b \frac{dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)}} = \int_0^{+\infty} \frac{2\,du}{1+u^2} = \left[2\arctg u\right]_0^{+\infty} = \pi.$$

b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n}$:

$\frac{1}{(1+t^2)^n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{2n}}$, donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n}$ converge ssi $2n > 1$

et pour tout n entier ≥ 1.

ETUSUP .com

Poser $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n}$. Par parties on a :

$$I_n = \left[\frac{t}{(1+t^2)^n}\right]_0^{+\infty} + 2n \cdot \int_0^{+\infty} \frac{t^2\,dt}{(1+t^2)^{n+1}}$$

$$= 2n \int_0^{+\infty} \frac{t^2\,dt}{(1+t^2)^{n+1}} = 2n \int_0^{+\infty} \left(\frac{1+t^2}{(1+t^2)^{n+1}} - \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}} \right) dt$$

$$= 2n \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n} - 2n \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^{n+1}}$$

donc $I_n = 2n I_n - 2n I_{n+1}$ soit $I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} I_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = [\operatorname{arctg} t]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$ et par récurrence

$$I_n = \frac{(2n-3)(2n-5)\cdots 3 \cdot 1}{2(n-1)\,2(n-2)\cdots 2} I_1$$

$$= \frac{\pi}{2} \frac{(2(n-1))!}{2^{2(n-1)}((n-1)!)^2}$$

c) $I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)\,dt$

La fonction $x \longmapsto \ln \sin x$ est continue sur $]0, \frac{\pi}{2}]$. D'autre part $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} \ln(\sin x) = 0$, donc $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$ tq $0 < x < \eta \Rightarrow$

$$|\sqrt{x} \ln \sin x| < \varepsilon$$

$\varepsilon = 1$, $0 < x < \eta \Rightarrow |\ln \sin x| < \frac{1}{\sqrt{x}}$. Donc

$$\int_0^{\eta} |\ln \sin x|\,dx < \int_0^{\eta} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \sqrt{\eta}$$

Donc $\int_0^{\pi/2} \ln \sin x\,dx$ converge.

Introduisons le changement de variable $t = \frac{\pi}{2} - x$ on a :

ETUSUP .com

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln \sin x \, dx = \int_0^{\pi/2} \ln \cos t \, dt = J \text{ . D'où}$$

$$2I = I + J = \int_0^{\pi/2} (\ln \sin x + \ln \cos t) dt = \int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{\sin 2x}{2}\right) dx$$

$$= -\frac{\pi}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \ln \sin 2x \, dx$$

Introduisons le changement de variable $u = 2x$, on a

$$\int_0^{\pi/2} \ln \sin 2x \, dx = \int_0^{\pi} \ln \sin u \, du = \int_0^{\pi/2} \ln \sin u \, du + \int_{\pi/2}^{\pi} \ln \sin u \, du$$

Introduisons le changement de variable $y = \pi - u$ dans $\int_{\pi/2}^{\pi} \ln \sin u \, du$, on a $\int_{\pi/2}^{\pi} \ln \sin u \, du = -\int_{\pi/2}^{0} \ln \sin y \, dy = \int_0^{\pi/2} \ln \sin y \, dy$

$$= I$$

On a donc :

$$2I = I + J = -\frac{\pi}{2}\ln 2 + I$$

$$I = -\frac{\pi}{2}\ln 2 .$$

<u>Exercice 9</u>

1) $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^\alpha}{n^{\alpha+1}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^\alpha$. Soit $f : x \longmapsto x^\alpha$; f est continue et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$. Donc

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \int_0^1 x^\alpha dx = \frac{1}{1+\alpha} .$$

b) $v_n = \frac{1}{n}\prod_{k=1}^{n} (n+k)^{1/n}$:

$$\ln v_n = \ln\left(\frac{1}{n}\prod_{k=1}^{n} (n+k)^{1/n}\right)$$

$$= \ln \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln(n+k)$$

ETUSUP .com

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \ln\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln(n+k)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\ln(n+k) - \ln n\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{n+k}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$f : x \longmapsto \ln(1+x)$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln v_n = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \ln(1+x)\,dx$

$$= \int_1^2 \ln t \, dt = \left[t \ln t - t\right]_1^2 = 2\ln 2 - 1$$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = e^{2\ln 2 - 1} = \frac{e^{2\ln 2}}{e} = \frac{e^{\ln 4}}{e} = \frac{4}{e}$.

ETUSUP .com

ETUSUP.com

Programmation
Cours
Informatique
Optique
Chimie
Algébre
Corrigés
Mathématiques
Travaux Pratiques
Electricité
Physique
Résumés
Analyse
Diapo
Exercices
Livres
Contrôles Continus
Langues
MTU
Mécanique
Thermodynamique
Divers
Multimedia
Economie
Travaux Dirigés
Droit
Chimie Organique

et encore plus..